

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A.FAVINI

SU UN PROBLEMA "TWO-POINT" PER UN SISTEMA
DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE

10 E 17 DICEMBRE 1981.

A.FAVINI

Su un problema "two-point" per un sistema
di equazioni differenziali astratte

Voglio esporre alcuni risultati che sono stati ottenuti da A. Veni e da me su un sistema di equazioni differenziali astratte che trova applicazione nella teoria del controllo ottimo.

Mi sembra opportuno premettere alcune definizioni e risultati che, d'altra parte, hanno interesse in sé.

1. Sulla teoria della interpolazione

Si dice che due spazi di Banach complessi A_0 e A_1 formano una coppia d'interpolazione se sono immersi con continuità in uno spazio lineare (complesso) di Hausdorff.

E' facile allora vedere che gli spazi $A_0 \cap A_1$ e $A_0 + A_1$ muniti rispettivamente delle norme

$$\|x\|_{A_0 \cap A_1} = \max \{ \|x\|_{A_0}, \|x\|_{A_1} \}, \quad x \in A_0 \cap A_1,$$

$$\|x\|_{A_0 + A_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_0 \in A_0 \\ x_1 \in A_1}} \{ \|x_0\|_{A_0} + \|x_1\|_{A_1} \}, \quad x \in A_0 + A_1,$$

sono spazi di Banach, con immersioni $A_1 \cap A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0 + A_1$ ($i=0,1$) continue.

Il metodo delle medie (Lions-Peetre) [6]

Se A è uno spazio di Banach e $v = v(t)$ è una funzione da $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ in A , si pone

$$\|v\|_{L_P^*(A)} = \|v(t)\|_{L_P^*(A)} = \left(\int_0^{+\infty} \|v(t)\|_A^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty(A)} = \|v(t)\|_{L_\infty(A)} = \sup_{0 < t < \infty} \|v(t)\|_A, \quad p = +\infty$$

Per la definizione degli spazi di medie, è fondamentale il seguente

Lemma 1.1 Sia A_0, A_1 una coppia d'interpolazione e sia $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)p_0 + \theta/p_1$; sia $a \in A_0 + A_1$ per cui risulta

$$a = v_0(t) + v_1(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

con

$$v_j(t) \text{ } A_j\text{-continua e} \quad (1.2)$$

$$t^{-\theta} \|v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)} < \infty;$$

Allora \exists costanti $c_1, c_2 > 0$ indipendenti da a , tali che

$$\begin{aligned} & c_1 \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}) \leq \\ & \leq \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)})^{1/p} \leq \\ & \leq c_2 \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}), \end{aligned}$$

dove l'inf è preso su tutte le possibili rappresentazioni del tipo (1.1) (1.2).

Prova. Si può supporre $a \neq 0$. Ma allora non può essere né x
 $v_0(t) \equiv 0$ né $v_1(t) \equiv 0$. Infatti, se $v_0(t) \equiv 0$, per esempio, allora $v_1(t) \equiv a$
 non soddisfa certamente $t^{1-\theta} v_1(t) \in L_{p_1}^*(A_1)$!

Se si rimpiazza t in (1.1) con λt , dove λ è un arbitrario numero positivo, si ottiene ancora una rappresentazione ammissibile.
 Scegliendo:

$$\lambda = \lambda(v_0, v_1) = \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{-1},$$

abbiamo, in forza della

$$A^{1-\theta} B^{\theta} \leq (1-\theta) A + \theta B, \quad A, B \geq 0, 0 < \theta < 1,$$

$$\begin{aligned} & \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}) \leq \\ & \leq \inf (\lambda^{\theta} \cdot \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)} + \lambda^{-(1-\theta)} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}) \leq \\ & \leq 2 \inf \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{1-\theta} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{\theta} \leq \\ & \leq C \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{P_0/P} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{P_1/P}). \end{aligned}$$

Ciò prova la prima disuguaglianza.

$$\text{Posto } \lambda = \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{P/P_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{-P/P_1},$$

per la stessa ragione di prima si ha

$$\begin{aligned} & \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{P_0} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{P_1})^{1/P} \leq \\ & \leq \inf (\lambda^{\theta P_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{P_0} + \lambda^{-(1-\theta)P_1} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{P_1})^{1/P} \leq \\ & \leq 2 \inf \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{P_0}^*(A_0)}^{1-\theta} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{P_1}^*(A_1)}^{\theta} \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}) \quad \text{Q.E.D.}$$

Osservazione. Si può dimostrare che se a $A_0 + A_1$ ha una rappresentazione del tipo (1.1) (1.2), allora ha una analoga espressione, con $v_j(t)$ infinitamente A_j derivabili
Si definiscono ora gli spazi $(A_0, A_1)_{\theta, p}$.

Definizione 1.2. Se $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $0 < \theta < 1$, si pone $(A_0, A_1)_{\theta, p} = \{a \in A_0 + A_1; a \text{ ha una rappresentazione (1.1) (1.2.)}\}$.

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} = \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}).$$

Se $p_0 = p_1 = \infty$, si pone

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \{a \in A_0 + A_1; a \text{ ha una rappresentazione del tipo (1.1) (1.2) con } p_0 = p_1 = \infty \text{ e}\}$$

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \inf (\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{\infty}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{\infty}^*(A_1)}).$$

Si può anche dimostrare il seguente teorema di equivalenza

[6].

Teorema 1.3 Se $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $0 < \theta < 1$, allora $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow a \in A_0 + A_1$ ed esiste $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow A_0 \cap A_1$ fortemente continua tale che

$$a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} \text{ in } A_0 + A_1,$$

$$\|t^{-\theta} u(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} u(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)} < \infty.$$

Vale un analogo risultato se $p_0 = p_1 = \infty$.

Il teorema di interpolazione (Lions-Peetre)

Teorema 1.4. Siano A_0, A_1 , B_0, B_1 due coppie d'interpolazione e sia T un operatore lineare da $A_0 + A_1$ in $B_0 + B_1$ tale che la restrizione di T a A_j sia continua da A_j a B_j ($j=0,1$). Allora T manda con continuità $(A_0, A_1)_{\theta, p} = A_{\theta, p}$ in $(B_0, B_1)_{\theta, p} = B_{\theta, p}$ e

$$\|T\|_{A_{\theta, p} \rightarrow B_{\theta, p}} \leq \text{Cost.} \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{\theta}.$$

Dimostrazione Sia $a \in A_{\theta, p}$ e sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Allora esistono $v_0(t), v_1(t)$ soddisfacenti (1.1) (1.2) tali che

$$\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)} < \|a\|_{A_{\theta, p}} + \varepsilon.$$

Allora $Ta = Tv_0(t) + Tv_1(t)$, dove $t^{-\theta} Tv_0(t) \in L_{p_0}^*(B_0)$, $t^{1-\theta} Tv_1(t) \in L_{p_1}^*(B_1)$ con

$$\|t^{-\theta} Tv_0(t)\|_{L_{p_0}^*(B_0)} \leq \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{p_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)}^{p_0},$$

$$\|t^{1-\theta} Tv_1(t)\|_{L_{p_1}^*(B_1)} \leq \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{p_1} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}^{p_1}$$

Così, in forza del Lemma 1.1.

$$\begin{aligned} \|Ta\|_{B_{\theta, p}} &< C (\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{p_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(A_0)}^{p_0})^{1-\theta} (\|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{p_1} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(A_1)}^{p_1})^{\theta} \\ &\leq C' \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{\theta} (\|a\|_{A_{\theta, p}} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, il teorema risulta provato Q.E.D.

Si dimostra poi il seguente teorema di densità.

Teorema 1.5. Sia A un sottospazio dello spazio di Banach X . A° denota il completamento di A in X . Nel nostro caso, \bar{A}_j denota il completamento di $A_0 \cap A_1$ in A_j , $j = 0, 1$. Ebbene, se A_0, A_1 è una coppia d'interpolazione, $0 < \theta < 1$ e $1 < p < \infty$, allora A_0, A_1 è denso in $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ e

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} = (\bar{A}_0, \bar{A}_1)_{\theta, p} = (A_0, \bar{A}_1)_{\theta, p} = (\bar{A}_0, A_1)_{\theta, p}.$$

2. Operatori positivi e interpolazione

Definizione 2.1. Sia A uno spazio di Banach e sia Λ un operatore lineare chiuso a dominio $D(\Lambda)$ denso in A . Si dice che Λ è un operatore positivo se $(-\infty, 0)$ è contenuto nell'insieme risolvente di Λ e $C > 0$ tale che

$$\|(\Lambda + t)^{-1}\|_{L(A)} < C(1+t)^{-1}, \quad t > 0.$$

Osservazione. Ogni operatore autoaggiunto definito positivo in uno spazio di Hilbert è positivo.

Se Λ è il generatore infinitesimale di un semigrupp fortemente continuo di tipo $\beta < 0$, allora $-\Lambda$ è positivo.

Per tali operatori c'è una caratterizzazione importante degli spazi $(A, D(\Lambda^m))_{\theta, p}$, dovuta fondamentalmente a Lions, Peetre e Grisvard.

Teorema 2.2. Sia Λ un operatore positivo. Sia m un numero naturale, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$. Se k, l sono interi soddisfacenti $0 \leq k \leq s = \theta m$, $l > s - k$, allora

$(A, D(\cdot^m))_{\theta, p} = \left\{ a \in A: \|a\|_{\theta, p} = \|t^{s-k} [\Lambda(\Lambda+t)^{-1}]^1 \Lambda^k a\|_{L_p^*(A)} < \infty \right\},$
 essendo $\|a\|_{\theta, p}$ una norma equivalente a quella introdotta in generale. Si noti che se $m = 1 = 1, k = 0$, risulta

$$(A, D(\Lambda))_{\theta, p} = \left\{ a \in A: \|a\|_{\theta, p} = \|t^\theta [\Lambda(\Lambda+t)^{-1}] a\|_{L_p^*(\Lambda)} < \infty \right\}.$$

3. Metodo operativo (Da Prato-Grisvard)

P. Grisvard e G. Da Prato si sono interessati in alcuni lavori del seguente problema:

Sia X uno spazio di Banach complesso e siano A, B operatori lineari chiusi a dominio D_A, D_B , rispettivamente, e con insiemi risolvanti non vuoti. Posto $Lx = Ax + Bx, x \in D_L = D_A \cap D_B$, studiare la risolubilità di

$$Lx - \lambda x = y, x \in D_L, \lambda > 0. \quad (3.1.)$$

Distingueremo due casi, quello in cui A e B commutano nel senso che, posto $[A_0; A_1] = A_0 A_1 - A_1 A_0$, risulti

$$[(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}] = 0, \quad \forall \lambda \in \rho_A, \forall \mu \in \rho_B, \quad (3.2)$$

e quello in cui (3.2) non è assunta.

Grosso modo, se B è l'operatore $-d/dt$ con condizione iniziale nulla, A è, nel primo caso un operatore differenziale del 2° ordine nella variabile spaziale x , a coefficienti indipendenti dal tempo t , mentre nel secondo caso, i suoi coefficienti dipendono da t .

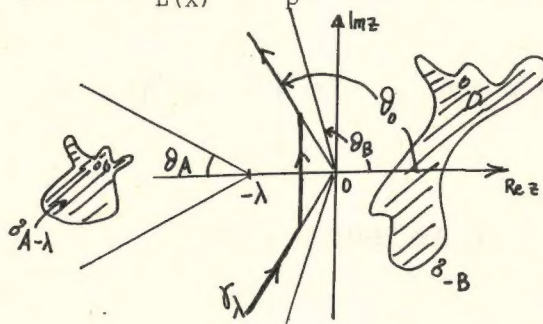
Introduciamo la seguente condizione:

Definizione 3.1. Sia P un operatore lineare da $D_P \subset X$ in X , $\varphi \in [0, \pi]$. Diremo che P soddisfa $H(\varphi)$ se

$$(i) \quad \rho_P \supseteq \Sigma_P = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\pi + \varphi < \arg \lambda < \pi - \varphi \right\},$$

(ii) $\exists C_P: (-\pi+\varphi, \pi-\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^+$, pari e convessa, tale che

$$\|(P-z)^{-1}\|_{L(X)} < C_P(\theta) |z|^{-1}, \quad \arg z = \theta.$$



IPOTESI H 1: Esistono $\theta_A, \theta_B > 0$ tali che A soddisfa $H(\theta_A)$, B soddisfa $H(\theta_B)$ e

$$\theta_A + \theta_B < \pi.$$

Se vale H 1, allora uno degli angoli θ_A, θ_B è necessariamente $< \pi/2$ e così l'operatore corrispondente è il generatore infinitesimale di un semigruppato analitico non necessariamente continuo in 0 (perché non è detto che D_A o D_B siano densi in X).

La soluzione di (3.1) si fonda su una costruzione esplicita della sua soluzione sotto la forma

$$x = S_\lambda y, \quad \text{dove}$$

$$S_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} dz, \quad \lambda > 0 \quad (3.3)$$

dove γ è una curva semplice da $\infty e^{-i\theta_0}$ a $\infty e^{i\theta_0}$ contenuta in $(\Sigma_A - \lambda) \cap \Sigma_{-B}$ con $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$. Per esempio, $\gamma = \gamma_\lambda$ può essere la frontiera orientata del dominio situato a sinistra delle rette:

$$\{z \in \mathbb{C}: \arg z = -\theta_0\}, \quad \{z \in \mathbb{C}: \text{Re } z = -(\lambda/2)\}, \quad \{z \in \mathbb{C}: \arg z = \theta_0\},$$

supponendo $\theta_0 > \pi/2$ e così $\theta_A < \pi/2$.

Non è difficile vedere che, valendo o no (3.2), risulta

Lemma 3.2. Se A, B soddisfano H.1, allora $\exists N > 0$ tale che

$$\|S_\lambda\|_{L(X)} \leq N/\lambda, \quad \lambda > 0.$$

IL CASO COMMUTATIVO

Lemma 3.3. Se vale (3.2) e H.1, allora

- (i) $S_\lambda (Lx - \lambda x) = x, \quad x \notin D_L;$
- (ii) $\forall x \in D_A + D_B, \quad S_\lambda x \in D_L$ e $(L - \lambda) S_\lambda x = x.$

Dimostrazione. (i) Poniamo

$$\begin{aligned} u(z) &= (A - z - \lambda)^{-1} (B + z)^{-1} (Lx - \lambda x) = \\ &= (B + z)^{-1} (A - z - \lambda)^{-1} (Ax - \lambda x) + (A - z - \lambda)^{-1} (B + z)^{-1} Bx. \end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{aligned} (A - z - \lambda)^{-1} (Ax - \lambda x) &= x + z (A - z - \lambda)^{-1} x, \\ (B + z)^{-1} Bx &= x - z (B + z)^{-1} x, \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} u(z) &= (B + z)^{-1} x + z (B + z)^{-1} (A - z - \lambda)^{-1} x + (A - z - \lambda)^{-1} x - z (A - z - \lambda)^{-1} (B + z)^{-1} x = \\ &= (B + z)^{-1} x + (A - z - \lambda)^{-1} x = \\ &= z^{-1} \left\{ (B + z)^{-1} Bx + (A - z - \lambda)^{-1} (z + A - \lambda + \lambda - A) x \right\} = \\ &= z^{-1} \left\{ - (B + z)^{-1} Bx + (A - z - \lambda)^{-1} (Ax - \lambda x) \right\}. \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} S_\lambda (Lx - \lambda x) &= - (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} u(z) dz = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} (B - z)^{-1} Bx \frac{dz}{z} - \\ &- (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} (A - z - \lambda)^{-1} (Ax - \lambda x) \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo perché $(B + z)^{-1} Bx/z$ è olomorfa e decre

sce come $|z|^{-2}$ a sinistra di γ_λ ; il secondo integrale vale $-x$, in forza del teorema dei residui e della decrescenza in $|z|^{-2}$ della funzione integranda.

$$\text{Così } S_\lambda(Lx - \lambda x) = x.$$

(ii). Poiché A, B hanno ruoli simmetrici, basta considerare il caso di $x \in D_B$, per esempio. In forza di (3.2), essendo $x \in D_B$, $y = S_\lambda x \in D_B$ e $By = S_\lambda Bx$. Per verificare che $y \in D_A$, osserviamo che

$$\begin{aligned} (B+z)^{-1}x &= \frac{1}{z} \left\{ x - (B+z)^{-1} Bx \right\}. \text{ Quindi,} \\ y = S_\lambda x &= -(2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} x \frac{dz}{z} + (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx \frac{dz}{z} \\ &= (A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Di qui,

$$\begin{aligned} Ay &= A(A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1} \int_\gamma A(A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx \frac{dz}{z} = \\ &= A(A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (z+\lambda)(A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx \frac{dz}{z} = \\ &= x - \lambda(A-\lambda)^{-1}x + \lambda(2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx \frac{dz}{z} + \\ &\quad + (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} Bx dz = \\ &= x + \lambda y - By. \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$

Si può dimostrare che se A, B soddisfano la (3.2) e H_1 , con $D_A + D_B$ denso in X , allora L ha una chiusura \bar{L} con $\rho_{\bar{L}}^{-1} \supset (0, +\infty)^{-1}$ e $(\bar{L} - \lambda)^{-1} = S_\lambda, \forall \lambda > 0$.

Inoltre, \bar{L} verifica $H(\sup(\theta_A, \theta_B))$ e così, se A e B sono generatori infinitesimali di semigruppì olomorfi soddisfacenti (3.2), allora anche \bar{L} lo è.

L'introduzione degli spazi d'interpolazione consente di precisare $D_{\bar{L}}$. Prima però introduciamo, per semplicità di scrittura e per

seguire l'uso, la seguente

Definizione 3.4. Sia T un operatore lineare chiuso in X e sia D_T munito della norma del grafico. Si pone

$$D_T(\theta; p) = (D_T; X)_{1-\theta, p} = (X; D_T)_{\theta, p},$$

$$p \in [1, \infty], \quad 0 < \theta < 1.$$

Pertanto (cfr. § 1) se $\rho_T(0, \rho_{-T}) \supset \mathbb{R}^+$ e $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C(\lambda+1)^{-1}$ (o solo $C\lambda^{-1}$), $\lambda > 0$, allora $D_T(\theta; p)$ è il sottospazio di X formato da= gli x tali che

$$\|t^\theta T(T-t)^{-1} x\| \in L_p^*, \quad p > 1.$$

Il caso che ci interessa è quello di

$$D_p = \{u \in L^p(0, T; E) = X; u' \in X, u(0) = 0\}, \quad Pu = -u',$$

per cui $D_p = W_0^p(0, T, E)$, spazio di Sobolev d'ordine 1 su $[0, T]$ a valori nel Banach complesso E , con la condizione $u(0)=0$. Risulta

$$\begin{aligned} (W_0^{1,p}(0, T; E); L^p(0, T; E))_{1-\theta, p} &= (L^p(0, T; E); D_p)_{\theta, p} = \\ &= \begin{cases} W^{\theta, p}(0, T; E), & \text{se } 0 < \theta < 1/p, \\ W_0^{\theta, p}(0, T; E), & \text{se } 1/p < \theta < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

dove

$W^{\theta, p}(0, T; E)$ denota lo spazio delle $u \in L^p(0, T; E)$ tali che

$$\int_0^T \int_0^T \|u(t) - u(s)\|_E^p \frac{dt ds}{|t-s|^{1+\theta p}} < \infty \quad (0 < \theta < 1/p),$$

$$W_0^{\theta,p}(0,T;E) = \left\{ u \in W_0^{\theta,p}(0,T;E) : u(0) = 0 \right\} \quad (1/p < \theta < 1).$$

Se E è uno spazio di Hilbert, $p = 2$ e $0 < \theta < 1/2$, poiché

$$D_{P^*} = \left\{ u \in X : u' \in X, u(T) = 0, P^*u = u' \right\},$$

risulta

$$D_p^{\theta,2}(0,T;E) = W_0^{\theta,2}(0,T;E) = D_{P^*}^{\theta,2}(0,T;E)$$

L'introduzione degli spazi $D_A(\theta;p)$ o $D_B(\theta;p)$ è, come dicevamo, motivata dal fatto che se $x \in D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$), allora $y = S_\lambda x \in D_L$ e $Ay, By \in D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$); cioè, la restrizione di L a $D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$) è chiusa e non solo chiudibile.

Si vede infatti che

Teorema 3.5. Se valgono (3.2) e H.1, allora

$$D_L^- \subset D_A(1;\infty) \cap D_B(1;\infty) \subset D_A(\theta;p) \cap D_B(\theta;p)$$

dove $\theta \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty]$; $D_A(1;\infty) = \left\{ a \in X; \|tA^2(A-t)^{-2}x\| \in L_\infty^* \right\}$.

Teorema 3.6. Se $y \in D_A(\theta;p) + D_B(\theta;p)$, $\theta \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty]$, allora $x = S_\lambda y \in D_L$ e $(L-\lambda)x = y$.

Se $y \in D_A(\theta;p)$ [o a $D_B(\theta;p)$], allora $Ax, Bx \in D_A(\theta;p)$ [rispettivamente, a $D_B(\theta;p)$].

Teorema 3.7. Se valgono (3.2) e H.1, X è uno spazio di Hilbert, D_A e D_B sono densi in X ed esiste un $\theta \in (0,1)$ tale che $D_B(\theta;2) = D_B^*(\theta;2)$, allora L è chiuso (come operatore in X), $\rho_L \supset (0,+\infty)$ e $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

IL CASO NON COMMUTATIVO

Supporremo sempre che A, B soddisfino H_1 , lasciando cadere (3.2), che è sostituita dalla ipotesi più debole:

IPOTESI H_2 Diciamo che A, B soddisfano $H(A, B, \varphi)$ se

i) D_B è stabile per $(A-\lambda)^{-1}$ nel senso che

$$(A-\lambda)^{-1}(D_B) \subseteq D_B \quad \forall \lambda \in \rho_A,$$

ii) Esistono 2 funzioni C e φ su $(-\pi+\theta_A, \pi-\theta_A) \times (-\pi+\theta_B, \pi-\theta_B)$ e $(0, \infty) \times (0, \infty)$, rispettivamente, con C convessa e pari nelle due variabili, tali che

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\lambda} \varphi(|z+\lambda|, |z|) d|z| = 0,$$

$$\left\| \left[B; (A-\lambda)^{-1} \right] (B-\mu)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C(\theta', \theta'') \varphi(|\lambda|, |\mu|),$$

$$\theta' = \arg \lambda, \theta'' = \arg \mu, |\theta| < \pi - \theta_A, |\theta''| < \pi - \theta_B;$$

γ è una curva semplice da $\infty e^{-i\theta_0}$ a $\infty e^{i\theta_0}$ in $(\Sigma_A - \lambda) \cap \Sigma_B, \theta_0 < \theta_0 < \pi - \theta_A$.

In virtù di H_1 è lecito considerare l'operatore S_λ , $\lambda > 0$, ma questa volta, mancando (3.2), cade il Lemma 3.3.

Quello che possiamo provare è

Lemma 3.8 . Se valgono H.1 e H.2 e $y \in D_B$, allora $S_\lambda y = x \in D_L$ e $(L-\lambda)x = y + R_\lambda y$, dove

$$R_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} \left[B; (A-z-\lambda)^{-1} \right] (B+z)^{-1} dz.$$

La dimostrazione è abbastanza semplice e segue le linee di quella del Lemma 3.3.

Dal Lemma 3.8 abbiamo che $(1+R_\lambda)(D_B) \subseteq (L-\lambda)(D_L)$ e così, se

$1+R_\lambda$ è invertibile e D_B è denso in X , allora anche $(L-\lambda)(D_L)$ è denso in X e si ottiene una soluzione debole di (3.1).

Il modo più semplice per ottenere che $1+R_\lambda$ sia invertibile è quello di applicare il teorema di Neumann. Ora,

$$\|R_\lambda\|_{L(X)} \leq (2\pi)^{-1} \int_Y k \varphi(|z+\lambda|, |z|) d|z|,$$

dove k è una costante che non dipende da λ . Quindi, esiste $\omega_1 > 0$ tale che $\|R_\lambda\|_{L(X)} < 1$ per ogni $\lambda > \omega_1$. Così per tali λ , $1+R_\lambda$ ha inverso limitato.

Il nostro scopo è però quello di ottenere soluzioni strette. E a questo scopo tornano fuori gli spazi $D_B(\theta; p)$. Prima di tutto, si può dimostrare che, sotto H.1 e H.2, S_λ è continuo da X a $D_A(1; \infty) \cap D_B(1; \infty)$; inoltre, utilizzando il teorema di Young sulla convoluzione moltiplicativa (vedi, per esempio, il libro di OKIKIOLU), si prova:

Lemma 3.9. S_λ è continuo da $D_B(\theta; p)$ a D_L per ogni $\theta \in (0, 1)$ e $p \in [1, \infty]$; inoltre, se $y \in D_B(\theta; p)$,

$$(L-\lambda)S_\lambda y = y + R_\lambda y.$$

In effetti, poichè $y \in D_B(\theta; p)$, è facile vedere che $x = S_\lambda y \in D_L$ e

$$Bx = -(2\pi i)^{-1} \cdot \int_Y (A-z-\lambda)^{-1} \cdot B(B+z)^{-1} y \, dz + R_\lambda y, \quad (3.4)$$

$$Ax = -Bx + \lambda x + (1+R_\lambda)y. \quad (3.5)$$

Ora,

Lemma 3.10. Se $y \in D_B(\theta; p)$ allora $BS_\lambda y \in D_B(\theta; p)$, purchè

$$R_\lambda(D_B(\theta; p)) \subseteq D_B(\theta; p) \quad (3.6)$$

La prova è molto tecnica ed usa, come al solito, il teorema di Young sulla convoluzione.

Il punto cruciale è la (3.6). Una ipotesi chiaramente sufficiente per la sua validità è la seguente

Ipotesi H.3: $\left| \left[B; (A-z')^{-1} \right] (B-z'')^{-1} \right|_{L(D_B(\theta;p))} < C(\theta';\theta'') \varphi(|z'|;|z''|),$
 $\theta' = \arg z', \theta'' = \arg z'', |\theta'| < \pi - \theta_A, |\theta''| < \pi - \theta_B$

Si noti che se vale la (3.6), in virtù del Lemma 3.10 e della (3.5), anche $AS_\lambda y \in D_B(\theta;p) \quad \forall y \in D_B(\theta;p)$.

I lemmi precedenti permettono di provare il seguente teorema di esistenza ed unicità.

Teorema 3.10. Siano A, B operatori soddisfacenti H 1, H 2 e H 3. Allora $\exists \omega > 0$ tale che per $y \in D_B(\theta;p)$ il problema (3.1) ha una unica soluzione (stretta) x tale che $Ax, Bx \in D_B(\theta;p) \quad \forall \lambda > \omega$. Risulta $x = S_\lambda (1+R_\lambda)^{-1} y$.

Nel caso particolare di X spazio di Hilbert, si ha

Teorema 3.11. Valgano le ipotesi del Teorema 3.10, con X spazio di Hilbert, $p = 2$ e $\varphi(|z+\lambda|, |z|) = 0 \quad (|z|^{-1})$ per λ fissato.

Se D_B è denso in X e $D_B(\theta;2) = D_{B^*}(\theta;2)$, allora L è chiuso in X ed esiste $\omega > 0$ tale che $\rho_L \supseteq (\omega, \infty)$ e $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda (1+R_\lambda)^{-1}$.

4. Esempio di applicazione a problemi differenziali

Dò una breve descrizione del modo di approcciare un problema di tipo parabolico con le tecniche operazionali che ho descritto nel § 3.

Prendiamo come X lo spazio $L^p(0,T;E)$, $1 < p < \infty$, E essendo uno spazio di Banach complesso e sia P definito come in § 3:

$$D_P = \{ u \in X: u' \in X, u(0) = 0 \}, \quad Pu = -u'.$$

Sia $t \rightarrow A(t)$ una famiglia di operatori lineari chiusi in E

$\forall t \in [0, T]$ tali che $t \rightarrow (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} y$ è misurabile in $[0, T]$ a valori in E , $\forall y \in E$ e per ogni λ in opportuno sottoinsieme del piano complesso. Si pone

$$D_Q = \{u \in X; u(t) \in D_{\Lambda(t)} \text{ q.d., } t \rightarrow \Lambda(t)u(t) \in X\},$$

$$(Qu)(t) = \Lambda(t)u(t).$$

Si può vedere che se $D_{\Lambda(t)}$ è denso in $E \forall t \in [0, T]$, allora D_Q è denso in X .

Prendiamo $A=Q$, $B=P$ (cfr. § 3). Le $Lx = Ax+Bx$, $x \in D_L = D_A \cap D_B$, l'equazione (3.1) significa

$$\begin{aligned} -u'(t) + \Lambda(t)u(t) - \lambda u(t) &= f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Per trattare (4.1) nel caso in cui $\Lambda(t)$ dipende da t è necessario esplicitare B ; $[(A-z')^{-1}] (B-z'')^{-1}$.

Si ha in effetti

$$\{[P; (Q-z')^{-1}] (P-z'')^{-1} u\}(t) = \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t) - z')^{-1} \right\} \int_0^t e^{-z''(t-s)} u(s) ds,$$

valida non solo formalmente se valgono le ipotesi (si noti che P soddisfa $H(\pi/2)$):

(i) $\exists \theta_\Lambda \in [0, \pi/2)$ tale che $\Lambda(t)$ verifica $H(\theta_\Lambda)$ con $C_\Lambda(\theta)$ indipendente da $t \in [0, T]$;

(ii) $t \rightarrow (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} y$ appartiene a $W^{1, \infty}(0, T; E) \forall y \in E, \forall \lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda} = \{z \in \mathbb{C}: -\pi + \theta_\Lambda < \arg z < \pi - \theta_\Lambda\}$.

(iii) $\exists \alpha \in (0, 1]$ tale che $\left\| \frac{d}{dt} (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_\Lambda(\theta) |\lambda|^{-\alpha}$,

$$\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda} \text{ con } \arg \lambda = \theta.$$

Le (i)-(iii) assicurano che Q soddisfa $H(\theta_\Lambda)$ e, (in forza della (ii)), $(Q-z')^{-1} (D_P) \subseteq D_P \quad \forall z' \in \Sigma_\theta$. Inoltre, per la (iii) ed il fatto che P soddisfa $H(\pi/2)$,

$$\| [P; (Q-z'')^{-1}] (P-z'')^{-1} \|_{L(X)} \leq K (\cos \theta'')^{-1} (|z'|^\alpha |z''|)^{-1},$$

per $\arg z'' = \theta''$, $|\theta''| < \pi/2$, $z' \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$.

Per poter applicare il Teorema 3.10 dobbiamo però aggiungere un'altra condizione

(iv) Esiste $\eta \in (0,1)$ tale che

$$\left\| \frac{d}{dt} (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} - \frac{d}{ds} (\Lambda(s) - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_\Lambda(\theta) |\lambda|^{-\alpha} |t-s|^\eta,$$

dove $\lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$, $\theta = \arg \lambda$.

Ciò implica, infatti,

[Lemma 4.1. Se valgono le condizioni (i)-(iv), allora H 3 è soddisfatta se $0 < \theta < \min \{ \eta, 1/p \}$].

Dimostrazione. Posto $v = (P-z')^{-1} u$, con $u \in W^{\theta,p}(0,T;E)$ (si veda, a questo proposito, la p. 11), risulta

$$\begin{aligned} & \| [P; (Q-z'')^{-1}] v \|_{W^{\theta,p}}^p = \int_0^T \left\| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t) - z'')^{-1} \right\} v(t) \right\|_E^p dt + \\ & + \int_0^T \int_0^T \left\| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t) - z'')^{-1} \right\} v(t) - \left\{ \frac{d}{ds} (\Lambda(s) - z'')^{-1} \right\} v(s) \right\|_E^p \frac{dt ds}{|t-s|^{1+\theta p}} < \\ & < \left(\frac{k}{|z'|^\alpha} \right)^p \int_0^T \| v(t) \|_E^p dt + \left(\frac{k}{|z'|^\alpha} \right)^\eta \int_0^T \int_0^T \frac{\| v(t) \|_E^p}{|t-s|^{1+p(\theta-\eta)}} dt ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{k}{|z'|^\alpha} \right)^p \int_0^T \int_0^T \|v(t) - v(s)\|_E^p \frac{dt ds}{|t-s|^{1+\theta p}} \leq \\
& \leq \left(\frac{k}{|z'|^\alpha} \right)^p \|v\|_W^p \theta, p \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

In forza del Lemma 4.1, abbiamo così

$$\| [P; (Q-z')^{-1}] (P-z'')^{-1} u \|_{W^{\theta,p}} \leq \frac{k}{|\cos \theta''|} \frac{1}{|z''| |z'|^\alpha} \|u\|_{W^{\theta,p}}.$$

Quindi, assumendo $\varphi(|z'|, |z''|) = 0$ ($|z'|^{-\alpha} |z''|^{-1}$), si ottiene il seguente risultato (dovuto a KATO-TANABE attraverso la teoria dei semigruppı analitici)

Teorema 4.2. Sotto le ipotesi (i) - (iv), per ogni $f \in W^{0,p}(0,T;E)$, dove $0 < \theta < \min \{ \eta, 1/p \}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, il problema (4.1) ha una ed una sola soluzione stretta u , che soddisfa inoltre $u' \in W^{\theta,p}(0,T;E)$.

Applicando il Teorema 3.11, si ha anche

Teorema 4.3. Se E è uno spazio di Hilbert, $p=2$ e valgono (i) - (iv), allora $\forall f \in L^2(0,T;E)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, il problema (4.1) ha una unica soluzione stretta $u \in W_0^{1,2}(0,T;E)$.

5. Un problema di tipo "Two-Point"

Alcuni problemi di controllo ottimo connessi con equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico portano a studiare il seguente problema "two-point" in uno spazio di Hilbert

$$\begin{aligned}
x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\
u'(t) &= -A^*(t)u(t) + C(t)x(t) + g(t), \\
x(0) &= x_0, \quad u(T) = u_T.
\end{aligned} \quad 0 < t < T, \quad (5.1)$$

La seconda equazione del sistema definirebbe grosso modo uno stato aggiunto.

L'integrazione, se così vogliamo chiamarla, di (5.1) non è semplice. Il metodo descritto nel libro di LIONS (4), a cui riferiamo per dettagli, riduce (5.1) ad una equazione astratta di tipo Riccati, mediante l'introduzione di un "feedback" : $u = P(x)$.

Qui vogliamo riportare alcuni risultati di [3], in cui un problema del tipo (5.1) viene trattato utilizzando le tecniche operazionali che abbiamo punteggiato nel § 3.

Nel caso di operatori $A(t)$ autoaggiunti, una trattazione è stata data da COOPER [1] (vedi anche TARTAR [5]).

Si potrebbe tentare di approcciare (5.1) definendo

$$P(x,u) = (-x', u'),$$

$$D(P) = W_0^{1,P}(0,T;E) \times W_T^{1,P}(0,T;E),$$

dove $W_T^{1,P}(0,T;E)$ denota lo spazio delle $u \in W^{1,P}(0,T;E)$ tali che $u(T)=0$. Se poi si pone

$$Q(x,u) = (A(x) + B(u), -A^*(u) + C(x)),$$

cade però in generale la possibilità di soddisfare H_2 poiché D_P non è stabile per $(Q-\lambda)^{-1}$, supposte oltretutto per Q le condizioni di decrescenza per il suo risolvente.

Vedremo di aggirare dunque l'ostacolo mediante una tecnica di perturbazione e l'uso degli spazi d'interpolazione.

Poniamo:

Definizione 5.1.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Se} & P_0 x = -x', & D_{P_0} = W_0^{1,P}(0,T;E), \\ & P_T u = +u' & D_{P_T} = W_T^{1,P}(0,T;E), \end{array} \right.$$

allora $P(x,u) = (P_0 x, P_T u)$, $D_P = D_{P_0} \times D_{P_T}$.

Se $A_k(t)$, $B_k(t)$ sono operatori lineari in E , E spazio di Banach complesso,

$$D_{Q_k} = \{x \in L^P(0,T;E); x(t) \in D_{A_k(t)} \text{ q.d. in } [0,T],$$

$$A_k(\cdot) \times (\cdot) \in L^P(0,T;E)\},$$

$$Q_k x = A_k(\cdot) \times (\cdot), \quad k = 0, T,$$

$$D_Q = D_{Q_0} \times D_{Q_T}, \quad Q(x,u) = (Q_0 x, Q_T u).$$

Ciò posto, facciamo l'ipotesi H4

Ipotesi H 4. Per $k = 0, T$ e $0 < t < T$, $B_k(t) \in L(E)$; inoltre, $t \rightarrow B_k(t)$ è limitata nella norma di $L(E)$ e misurabile nella topologia forte di $L(E)$.

La H 4 assicura che $\forall u \in L^P(0,T;E)$, $t \rightarrow B_k(t)u(t) \in L^P(0,T;E)$ e $\|B_k(t)u(\cdot)\|_{L^P(0,T;E)} \leq C \|u(\cdot)\|_{L^P(0,T;E)}$. Di qui, se $G_k: L^P(0,T;E) \rightarrow L^P(0,T;E)$ è dato mediante $(G_k u) = G_k(t)u(t)$ e $G: X = L^P(0,T;E \times E) \rightarrow X$ è dato mediante $G(x,u) = (G_0 u, G_T x)$, allora $G_k (k=0,T)$ e G sono operatori limitati.

H 5: $A_k(t)$, $0 < t < T$, ha la proprietà $H(\theta_1)$ uniformemente in $t \in [0,T]$, esiste $\theta_1 \in (0, \pi)$ tale che $\Sigma_{\theta_1} \subseteq \bigcap_{0 < t < T} \rho(A_k(t))$ e $\lambda \forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$,

$t \rightarrow (A_k(t) - \lambda)^{-1} x$ è assolutamente continua $\forall x \in E$.

Inoltre, $\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$, $t \rightarrow (A_k(t) - \lambda)^{-1} x$ è assolutamente continua $\forall x \in E$. Inoltre, $\forall \lambda \notin \Sigma_0$ c'è $M_\lambda \subseteq [0,T]$, di misura nulla, tale che $\forall y \in E$, $t \rightarrow (A_k(t) - \lambda)^{-1} y$ ha derivata limitata in $[0,T] \setminus M_\lambda$ ($k = 0, T$). Inf

fine, c'è una funzione $C_1: (-\pi+\theta_1, \pi-\theta_1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che $\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$,

$$\left\| \frac{d}{dt} (A_k(t) - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_1(\arg \lambda) |\lambda|^{-\xi} \quad (k = 0, T),$$

dove ξ è un elemento di $(0, 1]$, ed esiste $\eta \in (0, 1]$ tale che $\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$ e $\forall t, s \in [0, T]$,

$$\left\| \frac{d}{dt} (A_k(t) - \lambda)^{-1} - \frac{d}{ds} (A_k(s) - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_1(\arg \lambda) |\lambda|^{-\xi} |t-s|^\eta.$$

Ipotesi H 6: $\forall x \in E, t \rightarrow D_k(t)x$ è assolutamente continua su $[0, T]$ e c'è $M \subseteq [0, T]$, di misura nulla, tale che su $[0, T] \setminus M, t \rightarrow B_k(t)x$ ha derivata limitata ($k = 0, T$).

Le Ipotesi H 4-6 verranno utilizzate in seguito per poter applicare i risultati astratti. Il seguente problema verrà, così, affrontato e risolto.

Definizione 5.2. Diremmo che (x, u) è una soluzione stretta di

$$\begin{aligned} x'(t) &= A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t) - \lambda x(t) + f(t), & 0 < t < T \\ u'(t) &= -A_T(t)u(t) - B_T(t)x(t) + \lambda u(t) + g(t), \\ x(0) &= u(T) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

se $x \in W^{1,P}(0, T; E), u \in W^{1,P}(0, T; E), x(t) \notin D_{A_0(t)} \text{ q.d. su } [0, T],$
 $u(t) \notin D_{A_T(t)} \text{ q.d. su } [0, T];$ la funzione $t \rightarrow (A_0(t)x(t), A_T(t)u(t))$ appartiene a $X = L^P(0, T; E \times E) \cong L^P(0, T; E) \times L^P(0, T; E)$, e vale (5.2).

E' allora chiaro che (5.2) può essere messo sotto la forma

$$(P + Q + G - \lambda) \omega = h \quad (5.3)$$

dove $\omega = (x, u), h = (-f, g).$

QUALCHE OSSERVAZIONE DI CARATTERE GENERALE

Lemma 5.3. Se valgono H_1 e H_2 allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda\|_{L(D_B(\theta; P))} = 0 \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Ricordo che

$$S_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} dz,$$

mentre

$$R_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} [B; (A-z-\lambda)^{-1}] (B+z)^{-1} dz.$$

Qui A, B sono quelli del ϕ_3 . Per noi, $B=P, A=Q$ nella (5.3.).

Ora, è ben nota ([2]) che $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda\|_{L(X)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_\lambda\|_{L(X)} = 0$

Poiché $G \notin L(X)$ c'è $\lambda_0 > 0$ tale che $\forall \lambda > \lambda_0$

$$\|R_\lambda\|_{L(X)} < 1, \|S_\lambda\|_{L(X)} \|(1+R_\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \|G\|_{L(X)} < 1.$$

Così $\forall \lambda > \lambda_0$ esiste in $L(X)$

$$\begin{aligned} T_\lambda &= (1+S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}G)^{-1}S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1} = \\ &= S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}(1+GS_\lambda(1+R_\lambda)^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Si può allora provare che se $D_B (= D_P)$ è denso in X e $\lambda > \lambda_0$, allora $\forall h \in X, T_\lambda h$ è l'unica soluzione FORTE (nel senso di DA PRATO-GRISVARD) di (5.3); cioè esiste una successione $h_n \in X, h_n \rightarrow h$ in X tale che (5.3) ha una unica soluzione stretta ω_n , dove h_n sostituisca h , e $\omega_n \rightarrow \omega$ in X .

Noi però vogliamo soluzioni strette. A tal fine, dobbiamo assumere

Ipotesi H 7: $G|_{D_B(\theta;p)} \in L(D_B(\theta;p)), R_\lambda|_{D_B(\theta;p)} \in$

$$L(D_B(\theta;p)) \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_\lambda\|_{L(D_B(\theta;p))} = 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si può allora vedere

Teorema 5.4. Valgano $H(\theta_R), H(\theta_Q), H(Q, P; \phi)$ e H 7. Allora $\forall \lambda > \lambda_\theta$ e $\forall h \in D_B(\theta;p)$ $T_\lambda h$ è l'unica soluzione stretta di (5.3). Inoltre, $QT_\lambda h, PT_\lambda h \in D_P(\theta;p)$.

L'ipotesi H 7 sarà senz'altro soddisfatta se G muta con continuità D_B in sé e R_λ muta D_B in sé con $\|R_\lambda\|_{L(D_B)} \leq \text{cost.}$ Ciò segue per interpolazione (Teorema 1.4) e perché sappiamo che

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_\lambda\|_{L(X)} = 0$$

SUGLI SPAZI DI INTERPOLAZIONE

Avendo definito $D_P = D_{P_0} \times D_{P_T}$, abbiamo subito che

$$D_P(\theta;p) = D_{P_0}(\theta;p) \times D_{P_T}(\theta;p).$$

Ma se $0 < \theta < 1/p$, allora $D_{P_0}(\theta,p) = W^{\theta,p}(0,T;E)$.

Posto $(\phi u)(t) = u(T-t)$, è chiaro che ϕ definisce un isomorfismo isometrico di $L^P(0,T;E)$ su se stesso tale che $\phi(D_{P_0}) = D_{P_T}$. Per interpolazione, $\phi(D_{P_0}(\theta;p)) = D_{P_T}(\theta;p)$ e così per $0 < \theta < 1/p$, possiamo identificare $D_{P_0}(\theta;p)$ con $D_{P_T}(\theta;p)$.

Nel caso di E spazio di Hilbert, poiché $P_T = P_0^*$, $P_0 = P_T^*$,

risulta facilmente $D_p^*(\theta; 2) = D_p(\theta; 2)$, $0 < \theta < 1/2$.

Soluzione di (5.2)

L'ipotesi H_6 implica il

[Lemma 5.5. Se H_6 è soddisfatta, allora $\forall \theta \in (0, 1/p)$, risulta $G|_{D_p(\theta; p)} \in L(D_p(\theta; p))$.

Infatti, la H_6 assicura, in forza del Teorema di Banach-Steinhaus, che $G_0|_{D_{p_0}(\theta; p)} \in L(D_{p_0}(\theta; p))$ e analogamente per G_T . Così

$$G|_{D_p(\theta; p)} \in L(D_{p_0}(\theta; p) \times D_{p_T}(\theta; p); D_{p_T}(\theta; p) \times D_{p_0}(\theta; p)).$$

Ma in virtù della precedente osservazione, $G|_{D_p(\theta; p)} \in L(D_p(\theta; p))$

Il risultato principale segue dal Lemma 4.1 e dal Teorema 4.2.

[Teorema 5.6. Se valgono H.4-6, $\theta \in (0, 1/p)$, allora per ogni $f \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, $g \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, il problema (5.2) ha una unica soluzione stretta (x, u) , tale che $x', u', A_0(\cdot)x(\cdot), A_T(\cdot)u(\cdot) \in W^{\theta, p}(0, T; E)$, purché λ sia abbastanza grande.

Il Teorema 4.3. implica a una volta il seguente

[Teorema 5.7. Se valgono H. 4-6, $D_{A_k}(t)$ è denso nello spazio di Hilbert $E \forall t \in [0, T]$, $k = 0, T$, allora per ogni λ sufficientemente grande e per ogni $f, g \in L^2(0, T; E)$ il problema (5.2) ha una ed una sola soluzione stretta.

Osservazione. Avrei potuto esporre risultati per il problema non omogeneo (5.2) con condizioni iniziali o finali non nulle. Si sareb=

bero dovuti usare allora certi risultati di tracce (in 0, 0 in T)
dovuti principalmente a GRISVARD.

vedi [2], p. 336 e sgg. .

- [1] J.M.COOPER: Two-Point Problems for abstract evolution equations, J.Diff. Eqs. 9 (1971), 453-495.
- [2] G.DA PRATO & P.GRISVARD: Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J.Math. Pures Appl. 54 (1975), 305-387.
- [3] A.FAVINI & A.VENNI: On a two-point problem for a system of abstract differential equations, Numer, Funct. An & Optim. 2(4) (1980), 301-322.
- [4] J.L.LIONS: Contrôle optimal de système gouvernés par des équations aux dérivées partielles, (DUNOD), 1968.
- [5] L.TARTAR: Sur l'étude directe d'équations non linéaires intervenant en théorie du Contrôle optimal, J. Funct. Anal, 17 (1974), 1-47.
- [6] H.TRIEBEL: Interpolation theory, Function spaces, Differential operators, (NORTH HOLLAND), 1978.